درسنامه نظریه گروه

وحید کریمی پور
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

این یادداشت ها بیشتر فهرست مطالب درس هایی است (با کمی تفصیل) که برای درس نظریه گروه درنیمسال تحصیلی (پاییز ۱۳۸۴) تهیه کرده ام. شاید سالها بعد پس از تصحیحات فراوان و صیقل کاری زیاد آنها را تبدیل به یک کتاب درسی برای استفاده دانشجویان فیزیک کنم. فعلا این یادداشت ها تنها برای دانشجویانی قابل استفاده است که درکلاس درس شرکت می کنند. آنهم شاید.

درس اول : آشنایی مقدماتی با گروه

۱ مقدمه

دراین درس نخست به تعریف میدان و سپس به تعریف فضای برداری روی یک میدان و نهایتاً به تعریف گروه می پردازیم. پس از مرور خواص مقدماتی از یک گروه و اثبات چند قضیه ساده در این باره، به ارایه مثال هایی از گروه ها می پردازیم.

۲ میدان

معروف ترین مثالی که از میدان می شناسیم میدان اعداد حقیقی است که همواره با آن سروکار داریم. این میدان مجموعه‌ای است از اعداد با دو عمل جمع و ضرب که دارای خواص معینی هستند. به طور کلی میدان به هرمجموعه‌ای از اشیا گفته می شود که بین آنها دو عمل موسوم به عمل جمع و ضرب تعریف شده باشد که این دو عمل همان خواص اشنای اعداد را داشته باشند. به طور دقیق تر میدان به شکل زیر تعریف می شود:

تعریف: یک دستگاهِ $\{F, +, \cdot\}$ شاملِ یک مجموعه‌ی F به همراه دو نگاشتِ جابجایی و شرکت پذیرِ $+ : F \times F \longrightarrow F$ و $\cdot : F \times F \longrightarrow F$ یک میدان [1] خوانده می شود هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} A1: &\quad \exists \;\; 0 \in F \;\; | \;\; \forall \alpha \in F, \quad 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha, \\ A2: &\quad \forall \;\; \alpha \in F, \quad \exists \;\; (-\alpha) \in F, \;\; | \quad \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} M1: &\quad \exists 1 \;\; \in F \;\; | \;\; \forall \alpha \in F, \quad 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha, \\ M2: &\quad \forall \;\; \alpha \neq 0 \in F \;\; \exists \, (\alpha^{-1}) \quad | \quad \alpha \cdot (\alpha^{-1}) = (\alpha^{-1}) = 1, \end{aligned} \tag{2}$$

و

$$AM: \quad \forall \;\; \alpha, \beta, \gamma \in F, \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \tag{3}$$

---

[1] Field

دربسیاری اوقات برای سادگی بجای نماد $\alpha \cdot \beta$ از نماد $\alpha\beta$ استفاده می کنیم. هرگاه خاصیت جابجایی برای ضرب در یک میدان برقرارنباشد آن را یک میدان ناجابجایی [2] می گوییم.

۱.۲ مثال ها

مثال : مجموعه های اعداد گویا Q، اعداد حقیقی R و اعداد مختلط C به همراه جمع وضرب متعارفی که از آن ها می شناسیم مثال های مهمی از میدان هستند.

مثال : میدان ناجابجایی کواترنیون ها[3] تعمیمی از اعداد مختلط است که به ترتیب زیر تعریف می شود: سه نماد i, j, k درنظرمی گیریم که درخاصیت های زیر صدق می کنند:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \tag{4}$$

مجموعه کواترنیون ها H به شکل زیرتعریف می شود:

$$H := \{q | q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, q_0, q_1, q_2, q_3 \in R\}. \tag{5}$$

دو کواترنیون p و qبه شکل زیر با هم جمع می شوند:

$$p + q := (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k. \tag{6}$$

هم چنین ضرب این دو کواترنیون نیز با توجه به رابطه‌ی 4 صورت می گیرد. این ضرب شرکت پذیراست ولی جابجایی نیست.
مزدوج یک کواترنیون q با $\overline{q}$ نشان داده می شود و برابراست با:

$$\overline{q} := q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k. \tag{7}$$

حاصلضرب یک کواترنیون q درمزدوج آن برابراست با:

$$q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \tag{8}$$

اندازه یک کواترنیون q با $|q|$ نشان داده می شود وبرابراست با:

$$|q| := \sqrt{q\overline{q}}. \tag{9}$$

هرکواترنیون غیرصفر یک وارون ضربی دارد که برابراست با:

$$q^{-1} := \frac{\overline{q}}{|q|^2}. \tag{10}$$

---
[2] Non-Commutative Field
[3] Quaternion

مثال : به ازای هر عددِ اول مثل n، مجموعه‌ی

$$Z_n = \{0, 1, 2, \cdots n-1\} \tag{11}$$

که درآن جمع و ضرب به سنجِ n صورت می گیرند، یک میدان تشکیل می دهد. دراین میدان عضو خنثی جمع و ضرب به ترتیب 0 و 1 هستند. دقت کنید که اول بودن عددِ n لازم است.

مثال : هرگاه عددِ n اول نباشد آنگاه مجموعه‌ی Z_n^* که از عدد صفر و تمام اعدادِ کوچکتراز n که نسبت به آن اول هستند، تشکیل می شود یک میدان است.

مرتبه ی یک میدان تعداد اعضای آن میدان است. به عنوان مثال مرتبه میدان Z_n^* برابر است با n.

۲.۲ طبقه بندی میدان ها

بنابر یک قضیه مهم در جبر، نشان داده می شود که مرتبه یک میدان همواره عبارت است از یک عدد اول مثل p یا توانی از یک عدد اول مثلِ p^n. این مطالب را بهتراست در یک قضیه که اثبات آن خارج از موضوع این درس است بیان کنیم.

قضیه‌ی طبقه بندی میدان ها:

الف: مرتبه یک میدان همواره عددی است به صورت p^n که درآن p یک عدد اول و n عددی مثبت یا صفراست.

ب: به ازای هرعددِ p^n حتماً یک میدان با آن مرتبه وجود دارد.

ج: هر دو میدانی که یک مرتبه داشته باشند حتماً با هم یکسان هستند.

بنابر قضیه فوق کافی است هر میدان را با مرتبه‌ی آن نشان دهیم. به همین مناسبت معمولاً از نمادِ GF_{p^n} برای نشان دادن یک میدان استفاده می شود. علامتِ GF مخففِ $Galois\ Field$ یعنی میدان گالوا است.

در زیر مثال های بیشتری از میدان ها می آوریم:

مثال : مجموعه زیر یک میدان با رتبه ۴ است:

$$GF_4 = \{0,\ 1,\ x,\ 1+x \quad | \quad 1+x+x^2 \equiv 0\}. \tag{12}$$

مثال : مجموعه زیر یک میدان با رتبه ۸ است:

$$GF_8 = \{0,\ 1,\ x,\ x^2,\ 1+x,\ 1+x^2,\ x+x^2,\ 1+x+x^2 \quad | \quad 1+x+x^3 = 0\} \tag{13}$$

دقت کنید که هیچ میدانی با مرتبه مثلاً ٦ یا ۱۲ وجود ندارد، زیرا این دوعدد توانی از یک عدد اول نیستند.

۳ فضای برداری

در این قسمت تنها به یاداوری تعریف یک فضای برداری می پردازیم. هدف این بخش تنها یادآوری تعریف اساسی است. خواننده علاقمند برای مطالعه بیشتر می بایست به یک کتاب جبر خطی مراجعه کند.

تعریف: مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان غ F می گوییم هرگاه دو عمل زیر تعریف شده

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \text{و} \qquad . : F \times V \longrightarrow V \tag{14}$$

ودارای خاصیت های زیر باشند:

$$\begin{aligned}
&A1: && x+y = y+x \\
&A2: && (x+y)+z = x+(y+z) \\
&A3: && \exists 0 \in V \mid && 0+x = x \\
&A4: && \forall x \in V && \exists -x \in V \mid && -x+x = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&M1: && \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \\
&M2: && (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \\
&M1: && \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\
&M1: && 1x = x.
\end{aligned} \tag{15}$$

به ازای هر دو بردار u و v و هر عدد $\alpha \in F$، $u+v$ جمع دو بردار و $\alpha\ u$ ضرب اسکالرِ α در بردارِ v نامیده می شود.

بسته به این که F میدان اعداد حقیقیِ R یامیدان اعداد مختلطِ C باشد، فضای برداری V را فضای برداری حقیقی یا مختلط می گوییم.

مثال ها: مجموعه های زیر هرکدام یک فضای برداری هستند. دراغلب این مثال ها تعریف جمع $+$ و ضرب اسکالر بدیهی است و خواننده می تواند خود تعریف طبیعی مورد نظر را پیشنهاد کند.

۱ — R^n یا مجموعه n تایی های مرتب حقیقی یک فضای برداری حقیقی است.

۲ — C^n یامجموعه n تایی مرتب مختلط، یک فضای برداری مختلط است.

۳ — $M_{m\times n}(F)$ یامجموعه ماتریس های $m\times n$ که درایه های آن عناصریک میدان F هستند، نیزیک فضای برداری است.

۴ — F^n یا مجموعه n تایی های مرتب که درایه های آن عناصر یک میدان F هستند نیزیک فضای برداری تشکیل می دهد. هرگاه مرتبه‌ی F محدود و برابر با q باشد، آنگاه تعداد اعضای فضای برداری F^n نیز محدود و برابر با q^n خواهد شد. دلیل این امر هم ساده است زیرا هر عضو $v \in F^n$ به صورت $v = (f_1, f_2, \cdots f_n)$ است و هر درایه‌ی f_i می تواند q مقدار مختلف را اختیار کند. به عنوان مثال بردارهای Z_2^2 عبارتند از:

$$Z_2^2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{16}$$

۴ گروه

در قیاس با میدان و فضای برداری گروه ساختار بسیار ساده‌ای دارد، زیرا تنها یک عمل در آن تعریف شده است.

تعریف: یک گروه عبارت است از یک مجموعه G بهمراه یک عمل دوتایی $* : G \times G \longrightarrow G$ و یک عنصر $e \in G$ به نحوی که خاصیت های زیررا داشته باشند:

الف : شرکت پذیری :

$$\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c) \tag{17}$$

ب : عضو خنثی

$$\forall a \in G \quad a * e = e * a = a \tag{18}$$

ج : عضو وارون

$$\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \mid a^{-1} * a = a * a^{-1} = e \tag{19}$$

ازاین به بعد از نوشتن نماد $*$ صرف نظر می کنیم و ضرب دوعنصر مثل a و b را به صورت ab می نویسیم.

هرگاه که خاصیت اضافه $ab = ba$ درگروه وجود داشته باشد، گروه آبلی [4] خوانده می شود و در غیر این صورت گروه غیرآبلی [5] خوانده می شود.

قضیه:

الف: عضو خنثی گروه یکتاست.

ب : وارون یک عضو گروه یکتاست.

ج : به ازای هر $g \in G$ ، $(g^{-1})^{-1} = g$.

د : به ازای هر $a, b \in G$، $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

اثبات:

الف: فرض کنید که e و e' هردو عضو خنثی باشند. دراین صورت خواهیم داشت :

$$e' = ee' = e \tag{20}$$

که درتساوی اول از خنثی بودن e و درتساوی دوم از خنثی بودن e' استفاده کرده ایم.

ب: فرض کنید که x و x' هردو وارون عضو a باشند. دراین صورت داریم

$$ax = e, \quad ya = e \tag{21}$$

اگر تساوی اول رااز چپ درy ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$y(ax) = ye, \longrightarrow \quad (ya)x = y, \quad ex = y, \quad x = y. \tag{22}$$

اثبات قسمت های ج و د آسان است.

---

[4] Abellian Group
[5] Non-Abellian Group

قضیه: اگر $ab = ac$ آنگاه $b = c$.

اثبات: طرفین را از چپ در وارون a ضرب می کنیم و از شرکت پذیری استفاده می کنیم. این قاعده، قاعده حذف نامیده می شود و مشابه آن برای حذف از راست نیز وجود دارد.

برای یک گروه می توان جدول ضربی به همان معنای متعارف که می شناسیم تشکیل داد. قواعد حذف نشان می دهند که در جدول ضرب گروه درهیچ سطریا ستونی نمی بایست عضو تکراری وجود داشته باشد.

تمرین جدول ضرب گروه های با ۲ تا ۵ عضو را تشکیل دهید و آنهاراطبقه بندی کنید.

تعریف: مرتبه یک گروه تعداد اعضای یک گروه مثل G را مرتبه آن گروه می نامند و با نمادِ $|G|$ نشان می دهند. گروهی که مرتبه آن یک عددِ متناهی است گروه متناهی [6] نامیده می شود. در فصل های ابتدایی این درس بیشتر به گروه های متناهی می پردازیم ولی در بقیه فصل ها به مطالعه گروه های نامتناهی بخصوص گروه های پیوسته می پردازیم.

۵ چند مثال ساده

طبیعی است که میدان هایی که در بخش اول ذکر کردیم هرکدام به تنهایی با عمل جمع و یا با عمل ضرب تشکیل یک گروه می دهند.

یک مثال مهم و کلی از گروه ها به شکل زیر معرفی می شوند.

مثال: هرگاه S یک مجموعه دلخواه و $Aut(S)$ مجموعه تمام نگاشت های وارون پذیر روی S باشند، آنگاه $Aut(S)$ با عمل ترکیب نگاشت ها یک گروه تشکیل می دهد. این گروه گروه خودسانی های [7] های S خوانده می شود. اگر $f,\ g \in Aut(S)$ دو عضو از این گروه باشند ضرب آنها به شکل زیر تعریف می شود:

$$(fg)(x) := f(g(x)), \qquad \forall x \in S \tag{23}$$

از آنجا که ترکیب دو نگاشت وارون پذیر یک نگاشت وارون پذیر است، درمی یابیم که $fg \in Aut(S)$. هم چنین نگاشت همانی با تعریف $e(x) = x, \qquad x \in S$ عضوِ خنثی این گروه را تشکیل می دهد. می توان با افزودن قید یا قیدهایی به این

[6] Finite Group
[7] Automorphisms

توابع زیرمجموعه‌هایی از توابع وارون پذیر روی S را بدست آورد که خود نیز گروه باشند.

مثال: هرگاه S یک مجموعه متناهی با n عضو باشد، از آنجا که هرنگاشت وارون پذیر چیزی جز یک جایگشت بین این اعضا نیست، $Aut(S)$ عبارت خواهد بود از گروه جایگشت های بین n شی که با S_n نشان داده می شود.

۱.۵ گروه تبدیلات خطی

یک دسته وسیع و بسیار مهم از گروه ها به صورت تبدیلات خطی روی یک فضای برداری تعریف می شوند. درواقع این گروه ها زیر گروه هایی از گروه های خودسانی روی فضاهای برداری هستند که درآن نگاشت های مورد نظر دارای خاصیت اضافی بودن خطی بودن هستند. از این به بعد برای تطابق با نمادگزاری های رایج مجموعه مورد نظر را بابه جای S با V نمایش می دهیم که روی ساختار خطی آن تاکید کرده کنیم. علامت V چنانکه می دانیم معمولاً برای نشان دادن یک فضای برداری به کار می رود. مجموعه‌ی تبدیل های خطی وارون پذیر روی یک فضای برداری V را با $GL(V)$ نشان می دهیم و آن را گروه تبدیلات عمومی خطی روی V [8] می خوانیم. عمومی بودن این تبدیلات به این معناست که هیچ قید دیگری به جز خطی بودن ندارند.
هرگاه T و T' دو عضو از $GL(V)$ باشند، آنگاه ضرب دو عضو هم چنان به صورت ترکیب دو نگاشت تعریف می شود یعنی $TT'(x) = T(T'(x))$. با انتخاب یک پایه برای فضای برداری V می توانیم هر نگاشت خطی را با ماتریس آن نشان دهیم که در این صورت ترکیب دو نگاشت T و T' متناظر با ضرب ماتریس های وابسته به این دو نگاشت خواهد شد. بنابراین اگر فضای برداری V n بعدی باشد و این فضا روی میدان F تعریف شده باشد، ماتریس وابسته به نگاشت T که آن را با $\hat{T}$ نشان می دهیم یک ماتریس مربعی با درایه های متعلق به F خواهد شد. دراین شرایط مجموعه ماتریس های مربعی و n بعدی $\hat{T}$ یک گروه تشکیل می دهند که آن را با نمادِ $GL_n(F)$ نمایش می دهیم. این گروه با همان گروه اول یعنی $GL(V)$ یکسان است. البته مفهوم شهودی یکسانی را بعداً به صورت دقیق تر بیان خواهیم کرد. دقت کنید که هرگاه F یک میدان متناهی با مرتبه‌ی q باشد $GL_n(F)$ نیزیک گروه متناهی خواهد بود که مرتبه‌ی آن از q^{n^2} کمتراست.

تمرین: اگر $F = Z_2$ باشد، عناصر گروه $GL_2(F)$ را بنویسید.

تمرین: اگر $F = Z_3$ باشد، عناصر گروه $GL_2(F)$ را بنویسید.

مثال: هرگاه فضای برداری V یک فضای برداری حقیقی n بعدی باشد، گروه تبدیلات خطی روی آن یک گروه نامتناهی است که آن را با $GL_n(R)$ نشان می دهیم. هرعنصر این گروه یک ماتریس وارون پذیرِ $n \times n$ با درایه های حقیقی است. به عنوان مثال داریم

[8] General Linear Transformations on V^8

$$GL_2(R) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad | \quad a,\ b,\ c,\ d, \in R, \quad ad - bc \neq 0\}. \tag{24}$$

این گروه گروه تبدیلات روی صفحه دو بعدی است. هر عضو از این گروه یک تبدیل خطی است که بردار $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ را به بردارِ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ می نگارد که در آن

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}. \tag{25}$$

مثال: زیر مجموعه ای از ماتریس های $GL_2(R)$ که متعامد باشند یعنی در شرطِ $AA^T = I$ صدق کنند، گروه ماتریس های متعامد دو بعدی حقیقی را تشکیل می دهند که با نمادِ $O_2(R)$ نشان داده می شود. به عبارت دیگر

$$O_2(R) = \{A \in GL_2(R), \quad | \quad AA^T = I\}. \tag{26}$$

از این که $AA^T = I$ می توان نتیجه گرفت که $det(A) = \pm 1$. زیر مجموعه‌ای از این ماتریس ها که دترمینان آنها برابر با یک است خود تشکیل یک گروه می دهند. این گروه با نماد $SO_2(R)$ نمایش داده می شود. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که هرماتریسِ A متعلق به گروه $SO_2(R)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0,\ 2\pi]. \tag{27}$$

گروه $SO_2(R)$ را گروه دوران های صفحه دوبعدی نیز می نامند، زیرا هر عضو از این گروه یک دوران به شکل زیر در صفحه دو بعدی القا می کند:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{28}$$

مثال: مجموعه ماتریس های سه بعدی و حقیقی متعامد تشکیل یک گروه می دهند. این گروه با نماد $O_3(R)$ نمایش داده می شود که درآن R به معنای حقیقی بودن درایه های ماتریس و O به معنای متعامد بودن این ماتریس هاست. به زبان دیگر داریم

$$O_3(R) = \{A \in GL_3(R), \quad | \quad AA^T = I\}. \tag{29}$$

از این که $AA^T = I$ می توان نتیجه گرفت که $det(A) = \pm 1$. زیر مجموعه‌ای از این ماتریس ها که دترمینان آنها برابر با یک است خود تشکیل یک گروه می دهند. این گروه با نماد $SO_3(R)$ نمایش داده می شود. در درسهای آینده نشان می دهیم که هر عضو از این گروه یک دوران در فضای سه بعدی القا می کند. به این معنی که هرگاه r یک بردار در فضای سه بعدی باشد، انگاه به ازای هر $A \in SO_3(R)$ بردارِ $r' = Ar$ دوران یافته‌ی بردارِ r حول یک محور و به اندازه یک زاویه مشخص است. محور دوران و زاویه دوران را می توان از روی ماتریس A بدست آورد. این موضوع را در درس های آینده یاد خواهیم گرفت.

مثال: هرگاه فضای برداری V یک فضای برداری مختلط n بعدی باشد، گروه تبدیلات خطی روی آن یک گروه نامتناهی است که آن را با $GL_n(C)$ نشان می دهیم. هرعنصر این گروه یک ماتریس وارون پذیرِ $n \times n$ با درایه های مختلط است. به عنوان مثال داریم

$$GL_2(C) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad | \quad a,\ b,\ c,\ d,\ \in C, \quad ad - bc \neq 0\}. \tag{30}$$

این گروه، گروه تبدیلات خطی روی یک فضای مختلط دو بعدی است.

مثال: زیر مجموعه ای از ماتریس های $GL_n(C)$ که یکانی باشند یعنی در شرطِ $UU^\dagger = I$ صدق کنند، گروه ماتریس های یکانی n را تشکیل می دهند که با نمادِ $U_n(C)$ نشان داده می شود. به عبارت دیگر

$$U_n(C) = \{U \in GL_n(C), \quad | \quad UU^\dagger = I\}. \tag{31}$$

از این که $UU^\dagger = I$ می توان نتیجه گرفت که $|det(U)| = 1$ یا $det(U) = e^{i\phi}$. زیر مجموعه‌ای از این ماتریس ها که دترمینان آنها برابر با یک است خود تشکیل یک گروه می دهند. این گروه با نماد $SU_n(C)$ نمایش داده می شود. خواننده می تواند نشان دهد که هر عضو از گروهِ $SU_2(C)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$U \in SU_2(C) \longrightarrow U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{32}$$

هم چنین واضح است که هر عضو از گروه $U_1(C)$ چیزی نیست جز یک عدد که به صورت فاز خالص است یعنی

$$U_1(C) = \{e^{i\phi}, \qquad {}^{\phi \in [0, 2\pi]}\}. \tag{33}$$

مثال: گروه پاوولی: ماتریس های دو بعدی مربعی موسوم به ماتریس های پاوولی را درنظر بگیرید:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

این ماتریس ها دررابطه زیر صدق می کنند:

$$\sigma_k \sigma_l = i\epsilon_{klm}\sigma_m, \tag{35}$$

که درآن ϵ_{klm} تانسورکاملاً پادمتقارن است و $\epsilon_{123} = 1$. با توجه به ا ین رابطه می توان نشان داد که مجموعه زیر یک گروه غیرآبلی با مرتبه 8 تشکیل می دهد.

$$G_0 = \{\pm I, \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \pm i\sigma_3\}. \tag{36}$$

هم چنین گروه زیر یگ گروه غیرآبلی بامرتبه 16 است.

$$G_1 = \{\pm I, \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \pm\sigma_3, \pm iI, \pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2, \pm i\sigma_3\} \tag{37}$$

می دانیم که گروه S_n یعنی گروه جایگشت های n شی مثالی از یک گروه متناهی است. درواقع این گروه چیزی نیست جز گروه خودسانی های یک مجموعه‌ی n عضوی. ولی به دلیلی که بعداً خواهیم دید این گروه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که مطالعه مستقل آن را ضروری می سازد. به همین دلیل است که آن را در یک بخش جداگانه مورد مطالعه قرار می دهیم.

٦ گروه جایگشت

یک مجموعه از n شی که آنهارا بابرچسب های $1, 2, \cdots n$ مشخص می کنیم، درنظر می گیریم. یک جایگشت از این مجموعه یک نگاشت یک به یک و پوشا از این مجموعه روی خودش است. مجموعه تمام این جایگشت هارا با S_n نمایش می دهیم. می توان یک جایگشت $\alpha \in S_n$ را به شکل زیر نشان داد:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

اگر $\alpha, \beta \in S_n$ دوجایگشت باشند، ضرب آن دو به صورت زیرتعریف می شود:

$$(\alpha\beta)(k) := \alpha(\beta(k)), \tag{39}$$

که درواقع به این معناست که $\alpha\beta$ همان ترکیب دو نگاشت α و β است. ازآنجا که ترکیب دو نگاشت یک به یک و پوشا خودیک نگاشت یک به یک و پوشاست، پس $\alpha\beta$ نیز یک جایگشت است . درنتیجه S_n تحت این ضرب بسته است. هم چنین عضو واحد دراین مجموعه وجود دارد که همان نگاشت همانی است:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{40}$$

ازآنجایی که وارون یک نگاشت یک به یک و پوشا خود یک نگاشت یک به یک و پوشاست ، وارون هرعضو $\alpha \in S_n$، نیز عضوی در S_n است که آن را با α^{-1} نشان می دهیم.

تعریف: یک عضوِ α از گروه جایگشت S_n، یک دوره یا سیکلِ [9] k تایی خوانده می شود هرگاه این عضو k شی از مجموعه‌ی n تایی را در یک سیکل جابجا کند. بهترین راه برای فهم این تعریف توجه به چند مثال است. عضو $\alpha \in S_3$ به شکل زیر یک سیکل سه تایی است:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

به عبارت دیگر

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 3, \quad \alpha(3) = 1. \tag{42}$$

هم چنین عضو $\beta \in S_5$ یک سیکل چهارتایی است:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

به عبارت دیگر

$$\beta(1) = 3, \quad \beta(3) = 4, \quad \beta(4) = 5, \quad \beta(5) = 1. \tag{44}$$

دقت کنید که β نقطه‌ی ۲ را ثابت نگاه می دارد.

تعریف: یک جابجایی [10] یک سیکل دوتایی است. به عنوان مثال در S_3، $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ یک جابجایی است.

می توان ثابت کرد که هر عضو از گروه جایگشت را می توان به صورت حاصل ضربی از سیکل های دوتایی نوشت.

۱.۶ گروه جایگشت سه تایی

ساده ترین گروه جایگشت S_2 است که دو عضو دارد و آبلی است. ساده ترین گروه جایگشت غیرآبلی S_3 است که ۶ عضو دارد:

$$S_3 = \{e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}. \tag{45}$$

[9] Cycle
[10] Transposition

این اعضا عبارتند از:

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{46}$$

خواننده می تواند براحتی جدول ضرب این گروه راتشکیل دهد.
قبل ازآنکه گروه جایگشت n عضو را مطالعه کنیم بهتر است که مفهوم مولد های یک گروه را مرور کنیم.

۷ مولد ها ی یک گروه و رابطه بین آنها

براحتی می توان تحقیق کرد که همه عناصر گروه S_3 از ضرب دو عنصر α و β بدست می آیند. یعنی

$$S_3 = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha, \alpha\beta\}. \tag{47}$$

دراین صورت می گوییم که α و β مولد های گروه S_3 هستند، یعنی تمام عناصراین گروه از ضرب توان های دلخواه از این دو عضو بدست می آیند یابه اصطلاح تولید می شوند. البته باید دقت کرد که بین این دو عنصر رابطه های زیر برقرارند:

$$\alpha^2 = e, \qquad \beta^2 = e, \qquad \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta, \tag{48}$$

که درنتیجه آن هرنوع حاصلضرب قابل تصور ازتوان های مولد ها چیزی بجزهمان ٦ عضو گروه S_3 تولید نمی کند.
هم چنین خواننده می تواند نشان دهد که گروه G_0 از عناصر $\{I, \sigma_1, \sigma_2\}$ تولید می شود و گروه G_1 از عناصر $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ تولید می شود. دقت کنیدکه انتخاب مولدهایکتانیست. به عنوان مثال برای گروه G_1 می توان مولدهای $\{I, iI, \sigma_1, \sigma_2\}$ را نیز انتخاب کرد.

تعریف: دریک گروه G زیر مجموعه ای ازعناصرمثل $S = \{g_1, g_2, \cdots g_n\}$ را مولد های گروه می گوییم هرگاه هر عضو گروه را بتوان به صورت حاصلضربی از توان های مثبت و منفی اعضای S نوشت . به عنوان مثال گروه $\{Z, +\}$ توسط $S = \{1\}$ تولید می شود. هم چنین گروه $\{nZ, +\}$ توسط $S = \{n\}$ تولید می شود. دراین حالت ها می نویسیم $G = \langle S \rangle$ و یا $G = \langle g_1, g_2, \cdots g_n \rangle$.
دربعضی موارد بین مولدهارابطه هایی وجود دارد مثل رابطه هایی که درمورد مولد های گروه S_3 دیدیم. اگر این رابطه هارا مجموعاً با R نشان دهیم، دراین صورت می نویسیم $G = \langle S \rangle / R$. به عنوان مثال داریم

$$S_3 = \langle \alpha, \beta \rangle / \{\alpha^2 = \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta\}. \tag{49}$$

تعریف : اگر یک گروه G تنها توسط یک عضو تولید شود، آن گروه یک گروه دوری $Cyclic\ \ Group$ خوانده می شود. دریک چنین گروهی می توان همه اعضا را به صورت توان های متوالی از یک عضو نوشت. مثالی از یک گروه دوری نامتناهی $Infinite\ \ Cyclic\ \ Group$ عبارت است از:

$$G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, \cdots\} \tag{50}$$

یک گروه دوری متناهی شکل زیر رادارد:

$$G = \{e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}, \tag{51}$$

که درآن $a^n = e$.
هرگروه دوری مسلماً آبلی است، اما هرگروه آبلی الزاماً دوری نیست مثل گروهی باجدول ضرب زیر:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(52)

می توانید براحتی تحقیق کنید که این گروه دوری نیست.

۸ مولد های گروه جایگشت

مولدهای گروه جایگشت S_n، عبارتنداز:

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}\}, \tag{53}$$

که درآن α_i جایگشتی است که تنها جای i و $i+1$ را عوض می کند. به عبارت دیگر:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & i+1 & i & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{54}$$

می توان نشان داد که تمام اعضای S_n از این جایگشت ها تولید می شوند. براحتی می توان دید که بین این مولد ها رابطه های زیر وجود دارد.

$$\alpha_i^2 \quad = \quad e,$$

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_i &= \alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1}, \\ \alpha_i\alpha_j &= \alpha_j\alpha_i \quad if \quad |i-j|>1. \end{aligned} \tag{55}$$

۹ گروه گیسو

یک تعمیم جالب و عمیق از گروه جایگشت، گروه گیسو یا گروه $Braid$ است. این گروه اهمیت زیادی درمطالعه توپولوژی گره ها دارد. فرض کنید که دریک صفحه n نقطه ی $p_1, p_2, \cdots, p_n$ قرارگرفته اند. صفحه ای به موازات این صفحه باهمان نقاط درروی آن درنظربگیرید. حال یک مجموعه منحنی درنظر بگیرید که نقاط پایینی را به نقاط بالایی وصل می کنند. این منحنی ها نباید یکدیگررا قطع کنند ولی می توانند هرشکل دلخواهی داشته باشند ویابه دوریکدیگرپیچ وتاب بخورند. ضمناً هردو مجموعه منحنی که به طورپیوسته به یکدیگر قابل تبدیل باشند باهم یکسان درنظر گرفته می شوند. اصطلاحاً می گوییم که فقط کلاس هموتوپی منحنی هاست که برای ما اهمیت دارند و نه خود منحنی ها. هرمجموعه منحنی یا کلاس هموتوپی آن یک عضو گروه گیسوخواهد بود. به طور دقیق تر داریم:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow R^2 \times [0,1], |\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t)) \tag{56}$$

که درآن $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ هامنحنی های پیوسته غیرمتقاطع هستند و عبارت بالا نشان دهنده این است که پارامتراین منحنی ها یعنی t بین صفر و یک تغییرمی کند. این منحنی ها از نقاط پایینی شروع می شوند، به عبارت دیگر

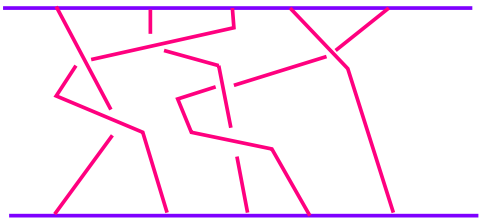
$$\gamma_1(0) = p_1, \quad \gamma_2(0) = p_2, \cdots, \gamma_n(0) = p_n, \tag{57}$$

و انتهای منحنی ها می توانند جایگشتی از نقاط ابتدایی آنها باشند،به عبارت دیگر نقاط $(\gamma_1(1), \gamma_2(1), \cdots, \gamma_n(1))$ جایگشتی از نقاط $(\gamma_1(0), \gamma_2(0), \cdots, \gamma_n(0))$ است.
هرعضو گروه گیسو یک مجموعه منحنی یا کلاس هموتوپی آن است. اعضای گروه را با حروف $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ نمایش می دهیم. حال باید برای این عناصر یک ضرب تعریف کنیم. نخست ضرب دو منحنی منفرد را به ترتیب زیر تعریف می کنیم. فرض کنید که $a : [0,1] \longrightarrow R^3$ و $b : [0,1] \longrightarrow R^3$ دومنحنی باشند. دراین صورت ضربِ ab به لحاظ شهودی یعنی این که اول منحنی a را طی کنیم و بعد منحنی b را. به همین ترتیب ضرب دوعضو گروه گیسو یعنی $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n)$ عبارت خواهدبود از کلاس هموتوپی

$$\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \cdots, \alpha_n\beta_n). \tag{58}$$

اگر $a : [0,1] \longrightarrow R^3$ یک منحنی باشد،منحنی ای که درجهت برعکس طی می شود به شکل زیرتعریف می شود:

$$a^{-1}(t) := a(1-t). \tag{59}$$



شکل ۱: یک عضو از گروه گیسوی B_5.

حال می توان وارون یک عضو گروه گیسو را به شکل زیر تعریف می کنیم که البته درهمه موارد منظورما کلاس هموتوپی منحنی هاست.

$$\alpha^{-1} = (\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_n^{-1}). \tag{60}$$

این ملاحظات تعریف گروه گیسو را کامل می کند. ضمناً عنصرواحد کلاس هموتوپی دسته منحنی ای است که بدون هیچ نوع پیچ وتابی نقاط پایینی را به نقاط بالایی وصل می کند.

شکل (۱) یک عضو ازگروه گیسوی 5 نقطه ای یعنی B_5 را نشان می دهد.

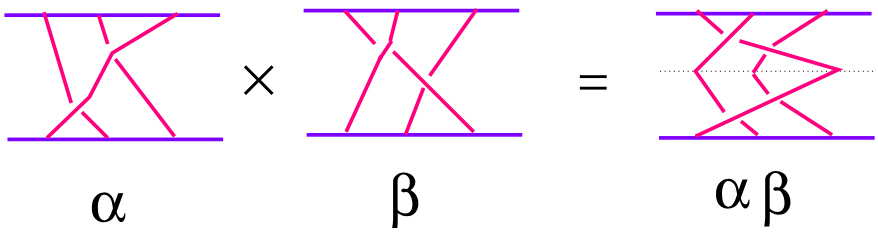
شکل های ۲ و ۳ نیز نشان می دهند که ضرب دو عضو از گروه گیسو و معکوس یک عضو از گروه گیسو چگونه تعریف می شوند.

۱.۹ مولد های گروه گیسو

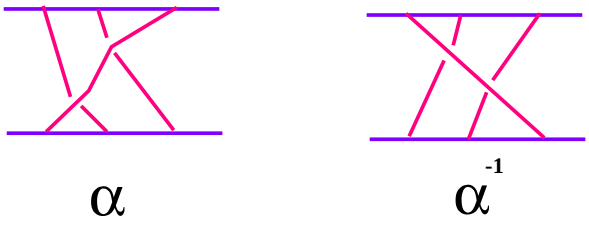
گروه گیسوی n نقطه ای دارای $n-1$ مولد است . این مولدهارا با $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{n-1}$ نشان می دهیم. شکل ۴ مولد σ_3 و وارون آن را درگروه B_7 نشان می دهد. بین این مولدها رابطه های زیربرقرارند:

$$\begin{aligned} &\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\ &\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad if \ \ |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{61}$$

برخلاف گروه S_n دیگر رابطه $\sigma_i{}^2 = 1$ برقرارنیست. همین موضوع گروه گیسو را به یک گروه بی نهایت عضوی تبدیل می کند. روابط 61 حاوی یک هم ارزی توپولوژیک بین گیسوهاست که خواننده خود می تواند صحت آنهاراتحقیق کند. اهمیت



شکل ۲: ضرب دو عضو از گروه B_3.



شکل ۳: وارون یک عضو از گروه B_3.

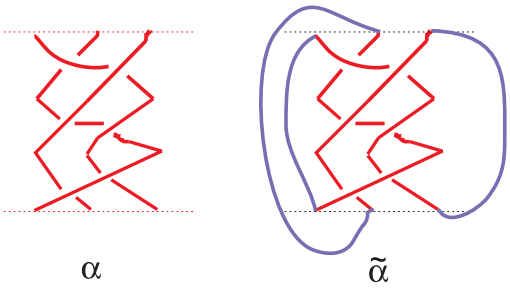
گروه گیسو در ارتباطی است که با نظریه گره ها [11] دارد.

نظریه گره به مطالعه کلاس های هم ارزی توپولوژیک گره ها در فضای سه بعدی می پردازد. دو گره K_1 و K_2 را هم ارز می گوییم هرگاه بتوان بدون پاره کردن یکی را به دیگری تبدیل کرد. گره بدیهی [12] به گرهی گفته می شود که در فضای ۳ بعدی مثل یک دایره نشسته است. می توان گره های بسیار پیچیده‌ای را در فضا تصور کرد که براحتی نتوان در باره هم ارز بودن یا نبودن آنها قضاوت کرد. نظریه گره مفاهیم و روش هایی را پیشنهاد می کند که بوسیله آنها بتوانیم این کار را انجام دهیم. یک قضیه مهم در نظریه گره بیان می کند که هر گره چیزی نیست جز بستار یک عضو از گروه گیسو. مفهوم بستار و محتوی این قضیه در شکل ۵ نشان داده شده است.

اهمیت نظریه گره به نوبه خود در آن است که فهم گره های هم ارز و یا طبقه بندی گره های هم ارز گام مهمی در راه طبقه

[11] Knot Theory
[12] Trivial Knot

شکل ۴: مولد σ_3 درگروه B_7(شکل دست راست) و وارون آن .



شکل ۵: یک عضو از گروه گیسوی B_3 به نام α و بستار آن که یک گره به نام $\tilde{\alpha}$ است.

بندی خمینه‌های توپولوژیک سه بعدی است که یک مسئله مهم در ریاضیات به شمار می رود.

۱۰ حاصلضرب دکارتی دو گروه

هرگاه دو گروه A و B داشته باشیم می توانیم گروه بزرگتری بسازیم که حاصلضرب دکارتی دو گروه نامیده می شود. بنابرتعریف داریم:

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A, \quad b \in B\}. \tag{62}$$

ضرب دراین گروه به شکل زیر تعریف می شود:

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1b_2). \tag{63}$$

عضو خنثی این گروه عبارت است از (e,e') که درآن e عضو خنثی A و e' عضو خنثی B است. هم چنین داریم

$$(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}). \tag{64}$$

به این ترتیب می توان ازگروه های $Z_n \times Z_m$ یا $GL_2(R) \times GL_3(R)$ سخن گفت.

۱۱ ضمیمه

این فصل را با یک ضمیمه در مورد اعداد به پایان می بریم.

قضیه: اگر یک عدد اول p حاصلضرب دوعدد a و b را بشمرد ، آنگاه p یا a را می شمرد و یا b را.

اثبات: هرگاه ab را به عامل های اول آن تجزیه کنیم عدد p که خود اول است یاجزء عامل های a است و یا جزء عامل های b، بنابراین یا a را می شمارد و یا b را.

قضیه: اگر $ab = ac \mod p$ و $0 \leq a < p$ ، آنگاه $b = c \mod p$.

اثبات:

$$ab = ac \mod p \longrightarrow p|a(b-c) \longrightarrow p|(b-c) \longrightarrow b - c = 0 \mod p. \tag{65}$$

دراین عبارت ازقضیه قبلی استفاده کرده ایم و این حقیقت که عدد p نمی تواند a را بشمارد، چون از a بزرگتراست.

قضیه: به ازای هر عدد اول p مجموعه $Z_p^* := \{1, 2, 3, \cdots p-1\}$ با ضرب درپیمانه p یک گروه تشکیل می دهد.

اثبات: عضو خنثی به طور بدیهی همان 1 است. این که برای هرعضو یک عضووارون وجود دارد از این جا معلوم می شود که بنابرقضیه قبلی درجدول ضرب این مجموعه درهیچ سطر یا ستونی عضو تکراری نمی تواند وجود داشته باشد، درنتیجه درهرسطر حتماً می بایست عنصر 1 در جایی از سطر یا ستون مربوطه پدیدارشود و همین به معنای وجود عضو وارون است.

هم چنین خواننده می تواند قضیه زیر را ثابت کند.

قضیه: هرگاه a یک عدد صحیح باشد $Z_a{}^*$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت کوچک تراز a است که نسبت به آن اول باشند. این مجموعه تشکیل یک گروه می دهد.

مثال: $Z_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}$. جدول ضرب این گروه عبارت است از:

	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

(66)